Лучшие эссе

Трапезникова Алия, 7 класс

Численность толпы

Количество людей на фотографии можно приблизительно вычислить многими способами. Для их сравнения введем понятия погрешность и трудоемкость (сложность).

Погрешность – это разность между приближенным и действительным значением. Самый точный метод (наименьшая погрешность) – посчитать количество людей на фото, но он является самым трудоемким. Трудоемкость (сложность) – время, потраченное на подсчеты (прямо пропорционально количеству подсчитанных людей).

Впрочем, помимо метода прямого подсчета, есть другие, менее точные и менее трудоемкие.

Возьмем, например, метод «Регионы». Он заключается в том, что мы разбиваем всё фото на равные регионы – прямоугольники, и подсчитываем количество людей в левом верхнем и в правом нижнем регионах (т.к. плотность людей на фото увеличивается справа налево и снизу вверх), это количество умножаем на количество регионов. Точность и трудоемкость этого метода зависит от количества регионов: чем больше регионов, тем больше точность и трудоемкость.

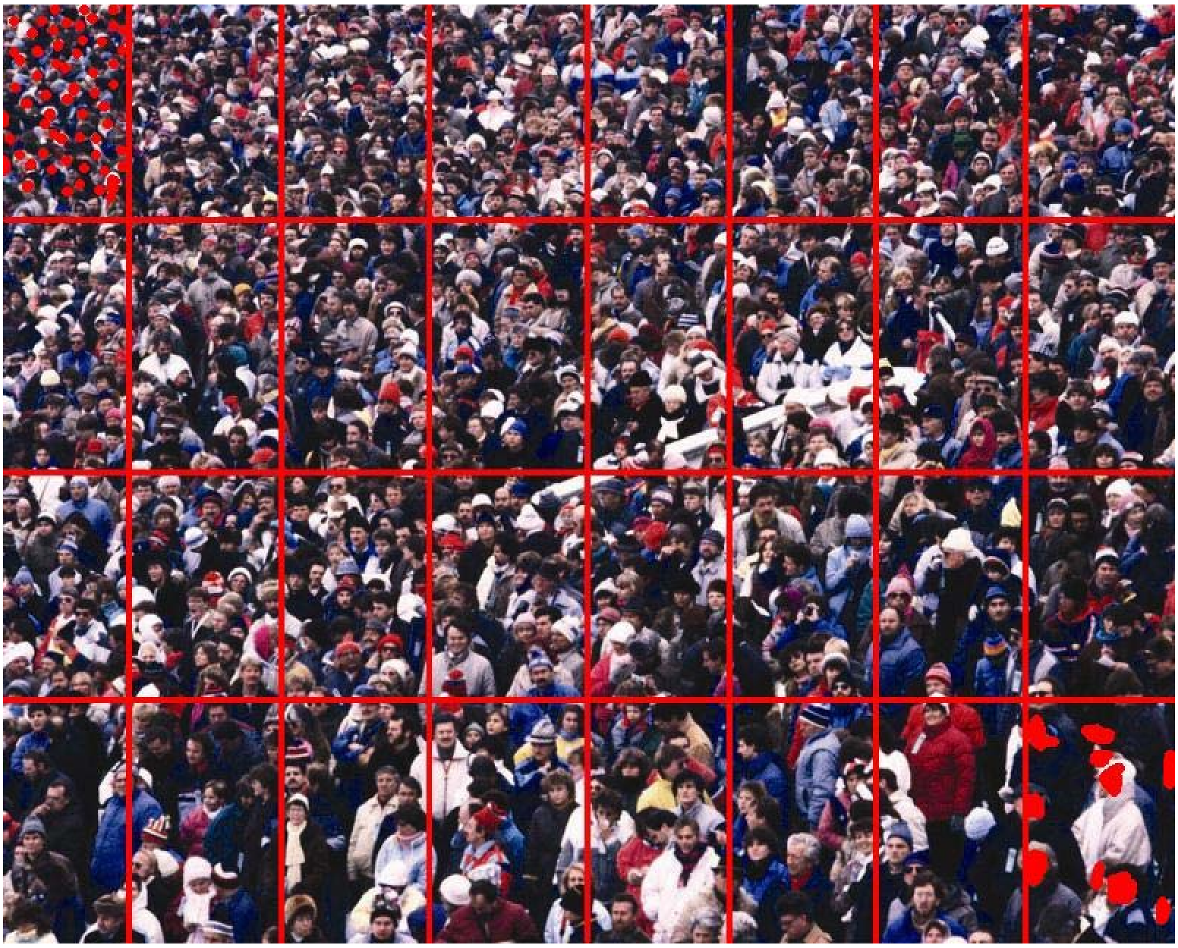


Рис. 1. Метод «Регионы» (красным отмечены посчитанные люди)

В левом верхнем регионе 60 человек. В правом нижнем регионе – 10 человек. В среднем в регионах по 35 человек. Количество регионов – 32. Человек на фото $32 \cdot 35 = 1120$.

Гораздо более простым является метод «Прямоугольник». Для этого вычисляем среднюю «длину» и среднюю «ширину» в людях прямоугольника – фотографии.

Рис. 2. Метод «Прямоугольник» (красным отмечены посчитанные люди)

Ширина слева равна 40 человек, справа – 20 человек. Средняя ширина - 30 человек.

Длина снизу равна 20 человек, сверху – 50 человек. Средняя длина – 35 человек.

Площадь (количество людей) равна 30*35=1050.

Как вариант этого метода – метод «Прямоугольники»: разбиваем фотографию на несколько равных прямоугольников и вычисляем «площадь» каждого из них методом «Прямоугольник».

Метод «Прямоугольники», безусловно, более точен, чем «Прямоугольник», но и более трудоемок.

Трудоемкость этого метода пропорциональна количеству прямоугольников.

Прямоугольник	Средняя ширина	Средняя длина	Площадь
1	(16+30)/2=23	(20+34)/2=27	621
2	(12+14)/2=13	(10+22)/2=16	208
3	(14+10)/2=12	(16+12)/2=14	168
4	(24+20)/2=22	(20+24)/2=22	484

Общее количество людей оценивается числом 621+208+168+484=1481.

Рис. 3. Метод «Прямоугольники» (красным отмечены посчитанные люди)

На мой взгляд, самым приемлемым с точки зрения практических подсчетов является метод «Прямоугольник». Однако из всех полученных мной результатов наиболее близким к истине является результат, полученный методом «Прямоугольники».

Ответ: Примерно 1300 человек (среднее арифметическое всех результатов).

Комментарий. Мы взяли на себя смелость немного отредактировать текст Алии. Например, разность между точным значением и оценкой мы назвали *погрешностью* (а не точностью).

Разумеется, в работе Алии отсутствует оценка погрешности (это весьма непростая задача), однако заслугой Алии является то, что она задумалась о связи погрешности и трудоёмкости измерения – чем меньше трудоемкость, тем, как правило, больше погрешность (меньше точность).

Другое достоинство работы состоит в том, что Алия применила три разных подхода к подсчету количества людей и получила результаты одного порядка (1120, 1050 и 1481). Это, безусловно, дает автору основание считать, что ее методы работают более-менее в согласии друг с другом и погрешность не очень велика (вспомним, что по разным публикациям в СМИ оценки численности толпы во время митингов различаются в два, а то и в десять раз).

Почему-то автор считает, что лучший метод «Прямоугольники». Возможно, это подсказывает интуиция, хотя трудно сказать, ошибается она в этом случае или нет. Но вместо того, чтобы выбрать «самый лучший результат» Алия усредняет результаты, полученные тремя разными способами. Видимо, именно здесь проявляется статистическая интуиция автора. Усреднение трёх разных оценок (четвёртая оценка) является третьим достоинством работы.

Подводя итоги, скажем, что автор работы трижды проявил высокую статистическую культуру и интуитивную грамотность:

1. Алия заметила связь между точностью и трудоёмкостью и поставила вопрос о компромиссе между ними.
2. Алия задумалась о надёжности своих выводов и, не умея оценить погрешность, пошла другим путем: убедилась в том, что три разных метода дают приемлемо близкие оценки.
3. Погадав, какая из оценок достовернее, Алия сделала лучшее, что могла: придумала метод получения четвёртой оценки – усреднение имеющихся трёх.

Эти три обстоятельства привели к тому, что мы признали работу Алии Трапезниковой лучшей среди всех эссе, представленных на эту тему. Спасибо, Алия.

Стефанов Кирилл, 7 класс

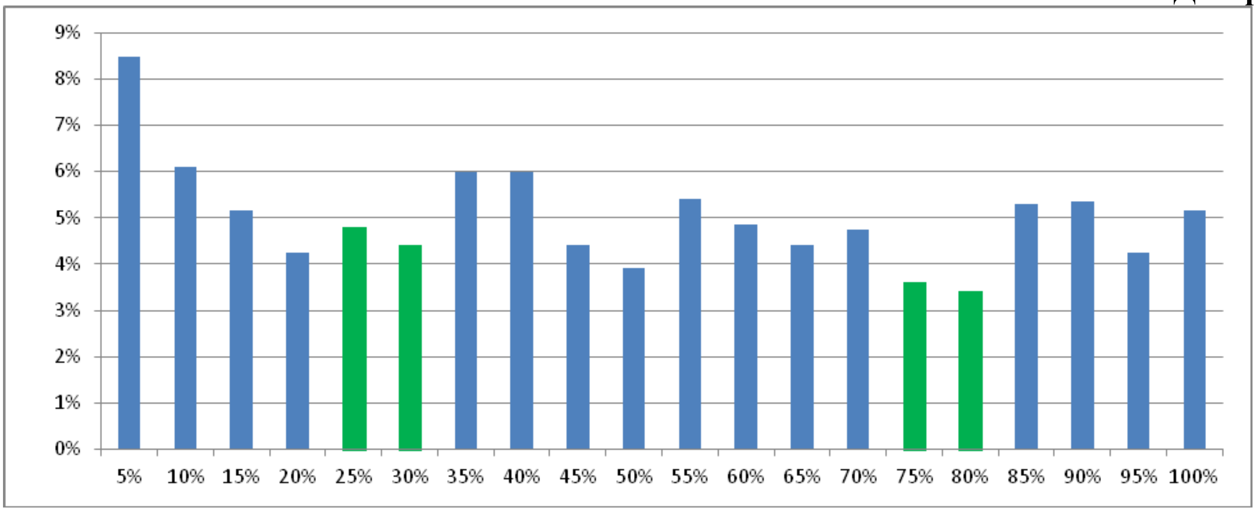
Выбор числа

Всего опрошено 33 респондента, из них 19 мужчин и 14 женщин. Было получено 1650 результатов, по 50 от каждого респондента. 44 результата пришлось исключить из обработки, потому что они оказались ошибочными (внесенные числа не попадали в указанные пределы). В итоге обрабатывалось 1606 результатов.

Опрашиваемые – люди от 27 до 58 лет. К сожалению, мне не удалось собрать данные с одноклассников или ровесников (начались каникулы), но интересно было бы это сделать и сравнить полученные результаты.

Далее, сгруппировав полученные доли в интервалы по 5% и определив, какая доля результатов попадает в каждый интервал, я получил диаграмму1.

Диаграмма 1



На диаграмме не наблюдается преобладания частот попаданий результатов вблизи точек 25% и точек 75 %, даже можно сказать наоборот – идет понижение. Считаю гипотезу необоснованной. Возможно, для подтверждения гипотезы требуется гораздо большее число опрашиваемых респондентов или форма опроса должна быть другой.

Когда я собирал результаты, то отмечал, мужчина или женщина заполняли таблицу. Отдельно по мужчинам результаты в диаграмме №2, а по женщинам в диаграмме 3. За 100% процентов принято общее количество результатов, т.е. 1606

Диаграмма 2

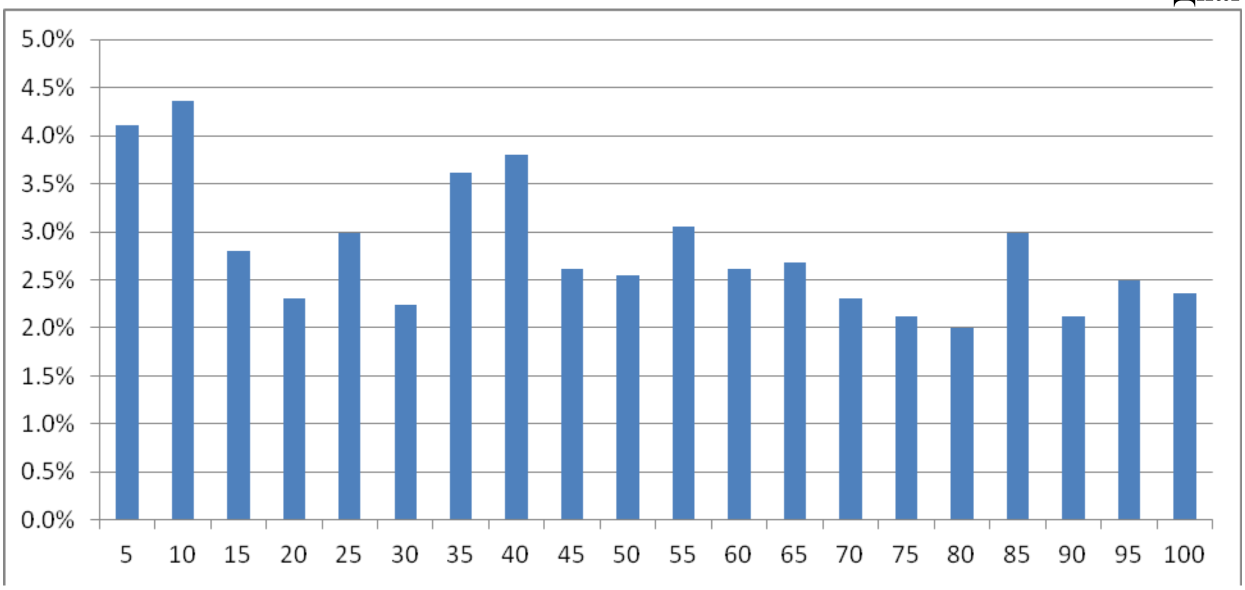
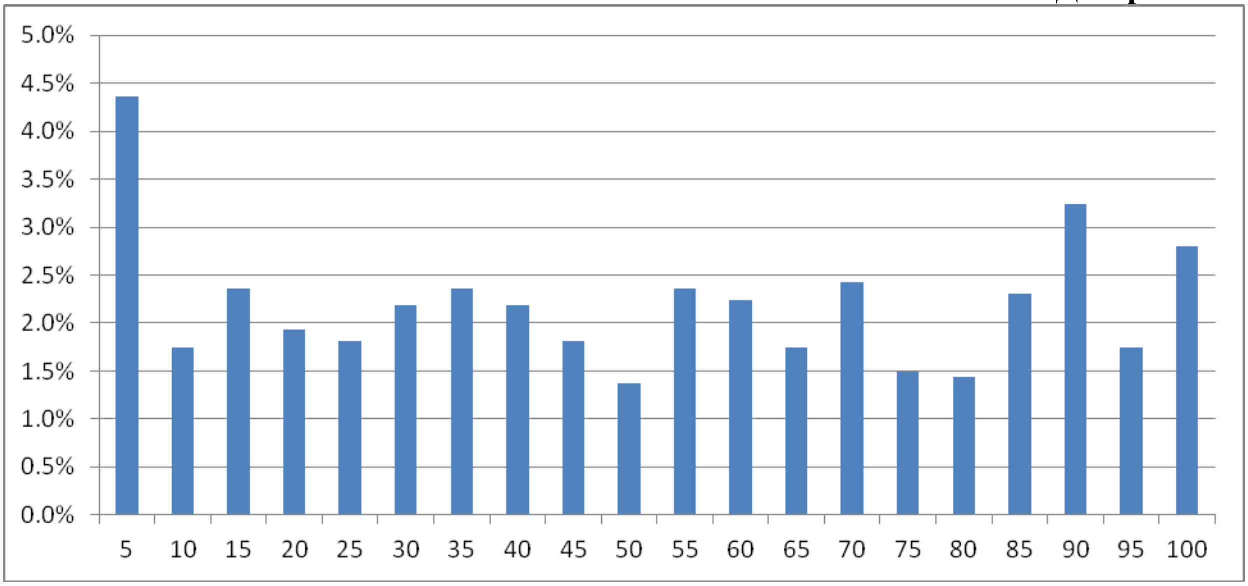


Диаграмма 3



По диаграммам 2 и 3результат такой же – гипотеза не подтверждается. Но некоторые закономерности для моей совокупности респондентов всё же могу отметить. Частота результатов от 0 % до 10%, т.е. в начале предлагаемых числовых отрезков, преобладает и составляет 14,6% от всех результатов.

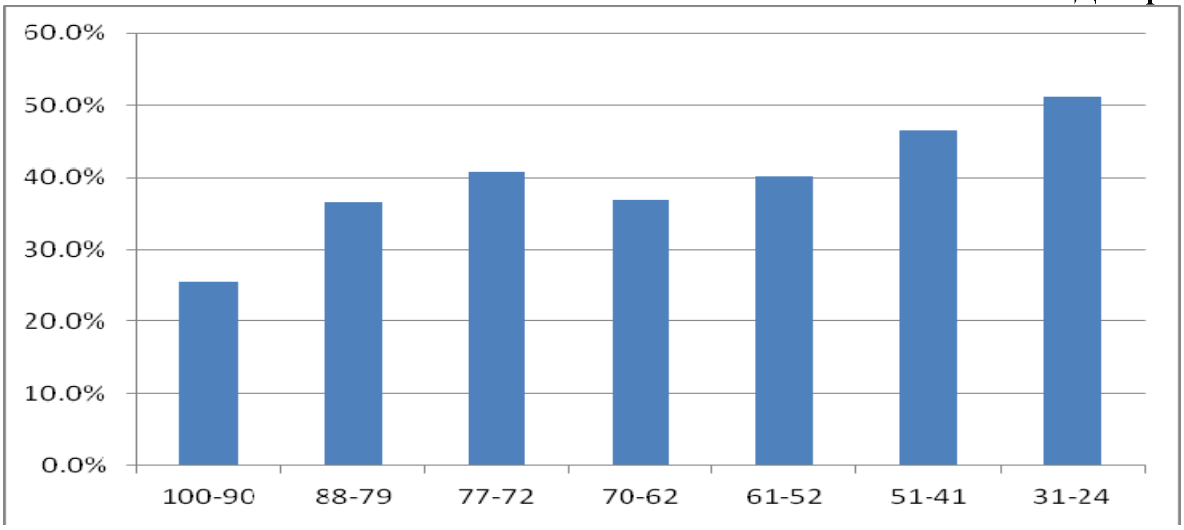
В пределах от 30% до 40% частота попаданий составляет 12%, от 50% до 60% – 10,3%, а в пределах от 80% до 90% частота попаданий составляет 10,6%.

Я проделал ещё некоторые попытки выявить закономерности в полученных результатах. Результаты расположились так: от 0 % до 50% доля частоты попадания результатов составила 51,6%, в 50% попали 1,6%, а более 50% доля составила 46,5%. Полученные результаты закономерностью не назовешь.

Частота попадания результатов в центральную зону увеличивается с уменьшением длины задаваемого числового интервала. И при минимальной длине отрезка (от 24 до 31) частота результатов попадающих в центральную зону (от 30% до 70%) составила 51,2% от всех результатов для этих отрезков.

Диаграмма 4 показывает, как зависит частота попадания в центральную зону от длины отрезка, предложенного респонденту.

Диаграмма 4



При большой длине отрезка частота попадания в центральную зону была минимальной (при длине 90 – 100 она составила 25,4% от всех результатов для этих отрезков). При уменьшении длины отрезка частота попадания в центральную зону растет. Например, для отрезков длиной 24 – 31 частота попадания в центральную зону в 2 раза выше, чем для отрезков длиной 90 –100.

Это уже больше похоже на закономерность или гипотезу.

Комментарий. Исходный текст работы Кирилла труден для понимания, поэтому пришлось значительно его редактировать, сохраняя структуру и мысли автора, насколько мы их поняли. Удалена диаграмма, которая была явно неудачной и лишней. Значительной переделке подверглась заключительная часть эссе, где автор пытается сформулировать наблюдение – с ростом длины отрезка все меньшая доля респондентов «попадает в его центр». Надеюсь, автор нас простит. А если мы неверно его поняли – поправит.

Почти все авторы эссе «Выбор числа» показали, что выдвинутая гипотеза несостоятельна (собственно, у нас не было никакого определённого мнения относительно ее справедливости). Несколько авторов обнаружили преобладание частот вблизи концов отрезков.

И все же мы отдали предпочтение работе Кирилла Стефанова из 24 лицея г.Нерюнгри, поскольку Кирилл, несмотря на неловко выраженные мысли (недостаток литературных навыков Кирилл скоро преодолеет), сделал, явно сформулировал и наглядно представил на диаграмме занятное и неожиданное наблюдение – **чем длиннее отрезок, тем меньшая часть людей попадает в его центральную часть.** Как пишет автор, «это уже больше похоже на закономерность или гипотезу». Не исключено, что именно эту гипотезу – гипотезу Стефанова – мы предложим проверить в следующей олимпиаде.

Среди присланных нам эссе на тему **«Секрет успеха»** мы не сумели выбрать достойное публикации. Практически все авторы заметили отсутствие видимой связи между финансированием дошкольного образования и результатами теста PISA, а также наличие слабой связи между финансированием среднего образования и результатами теста. Однако только один автор (участник 91224) догадался проверить достоверность обнаруженной связи. Этот автор пишет:

«ни один из парных коэффициентов корреляции не показывает наличие сильной связи. …Можно убедиться, что в нашей модели есть неучтенные факторы, которые могли бы сыграть большую роль. … Поэтому строить регрессионную модель, опираясь только на эти данные, нет смысла».

К сожалению, на этом исследование заканчивается – обнаружив отсутствие значимой связи, автор, вероятно, сделал верный вывод, но не стал фантазировать на тему неучтённых факторов. А жаль – это и было бы самым интересным: сотни учёных ломают голову над вопросом, почему в одних странах школьники пишут тест PISA намного лучше, чем в других.

Задачи

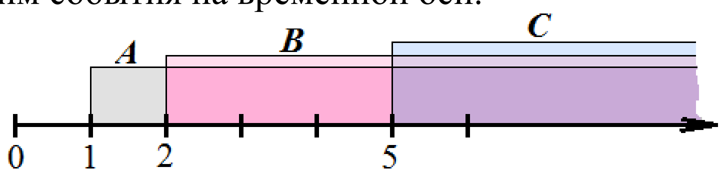
4. Автобус (6 – 11 классы, 1 балл). Аня ждёт автобус. Какое событие имеет наибольшую вероятность?

A = {Аня ждет автобуса не меньше минуты}

B = {Аня ждет автобуса не меньше двух минут.}

C = {Аня ждет автобуса не меньше пяти минут.}

Решение. Расположим события на временной оси.



На рисунке видно, что событие A включает в себя событие B, а событие B включает в себя событие C, то есть событие A наиболее обширное:

$$C \subset B \subset A.$$

Следовательно,

$$\mathrm{P}(C) \le \mathrm{P}(B) \le \mathrm{P}(A).$$

Ответ: Наиболее вероятно событие A.

5. Ряд из костей. (6 – 11 классы, 1 балл). 2012 правильных игральных костей (кубиков) составили в ряд таким образом, что каждые две соседние кости прилегают друг другу одинаковыми гранями (принцип домино). В остальном положение костей случайное. Найдите сумму очков, которые оказались на поверхности получившейся фигуры.

Решение. Сумма очков на кубике равна $1+2+3+4+5+6=21$. Общая очков на всех кубиках равна $2012 \cdot 21$. У правильной кости сумма очков на противоположных гранях равна 7. Пусть на торцевой грани первого кубика число очков равно X – это случайная величина, принимающая натуральные значения от 1 до 6. Тогда на торцевой грани последнего кубика число очков тоже X. Значит, сумма очков на прилегающих друг к другу гранях равна $2012 \cdot 7 - 2X$.

Вычитая эту сумму из общего числа очков, получаем:

$$2012 \cdot (21-7) + 2X = 28168 + 2X.$$

Ответ: 28170, 28172, 28174, 28176, 28178 или 28180.

6. Неизменная дисперсия (6 – 11 классы, 1 балл). В наборе

$$-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

замените одно число двумя другими целыми числами так, чтобы дисперсия набора и его среднее не изменились.

Решение. Как известно, дисперсия набора равна разности среднего квадрата и квадрата среднего:

$$S^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2.$$

Поэтому задачу можно переформулировать: нужно заменить одно число двумя другими так, чтобы среднее арифметическое и средний квадрат чисел в наборе не изменились. Среднее арифметическое данного набора равно 0, поэтому среднее арифметическое нового набора, а, следовательно, и сумма чисел в нём также должна быть равна 0.

В данном наборе 11 чисел, а сумма квадратов равна

$$2\cdot\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2\right)=110,$$

так что средний квадрат равен 10. В новом наборе 12 чисел, поэтому сумма квадратов чисел нового набора 120. Таким образом, сумма чисел не меняется, а сумма квадратов увеличивается на 10. Заменим число a числами b и c. Тогда

$$a=b+c \quad \text{и} \quad a^2+10=b^2+c^2.$$

Следовательно,

$$b^2+c^2-10=(b+c)^2=b^2+c^2+2bc,$$

откуда $bc=-5$.

Значит, одно из чисел равно 5 или –5, а другое, соответственно, –1 или 1. В первом случае $a=4$, во втором случае $a=-4$.

Ответ. Надо заменить –4 числами 1 и –5 или заменить 4 числами –1 и 5.

7. Записка. (6 – 11 классы, 1 балл). Вася написал на листке бумаги записку, сложил ее вчетверо, надписал сверху

МАМЕ

(см. фото). Затем он развернул записку, дописал еще кое-что, опять сложил записку по линиям сгиба случайным образом (не обязательно, как раньше) и оставил на столе, положив случайной стороной вверх. Найдите вероятность того, что надпись «МАМЕ» по-прежнему сверху.

Решение. У листа две стороны, и каждая разделена линиями сгиба на четыре части. Таким образом, всего на двух сторонах 8 частей. Каждая из этих частей с равной вероятностью может оказаться сверху при случайном складывании листа по старым линиям сгиба. Следовательно, вероятность того, что сверху окажется та часть, на которой написано «МАМЕ», равна $\frac{1}{8}$.

Ответ: $\frac{1}{8}$.

8. Волшебные пирожки (6 – 11 классы, 1 балл). У Алисы в кармане шесть волшебных пирожков — два увеличивающих (съешь — вырастешь), а остальные уменьшающие (съешь — уменьшишься). Когда Алиса встретила Мэри Энн, она, не глядя, вынула из кармана три пирожка и отдала их Мэри. Найдите вероятность того, что у одной из девочек нет ни одного увеличивающего пирожка.

Решение. Один из увеличивающих пирожков (УвП), безусловно, оказался у какой-то из девочек. Нужно найти вероятность того, что второй УвП оказался у нее же. У этой девочки после дележки помимо первого УвП есть еще два пирожка из пяти оставшихся. Значит, вероятность того, что второй УвП окажется одним из этих двух, равна $\frac{2}{5}$.

Ответ: $0,4$.

9. Круглый стол. Петр Иванович, еще 49 мужчин и 50 женщин в случайном порядке рассаживаются вокруг круглого стола. Назовем мужчину довольным, если рядом с ним сидит женщина. Найдите:

а) (6 – 11 классы, 1 балл) вероятность того, что Петр Иванович доволен;

б) (8 – 11 классы, 1 балл) математическое ожидание числа довольных мужчин.

Решение. а) Петр Иванович недоволен, только если по обе стороны от него сидят мужчины. Вероятность этого равна $\frac{49}{99}\cdot\frac{48}{98}=\frac{8}{33}$. Следовательно, вероятность противоположного события «Петр Иванович доволен» равна $\frac{25}{33}$.

б) Вероятность того, что один мужчина доволен, равна $\frac{25}{33}$. Это – математическое ожидание числа довольных мужчин среди одного мужчины. Тогда среди 50 мужчин математическое ожидание числа довольных равно $50\cdot\frac{25}{33}=\frac{1250}{33}$.

10. Ряд медиан. Ваня написал на доске число 1, а затем еще несколько чисел. Как только Ваня пишет очередное число, Митя вычисляет медиану уже имеющегося набора чисел и записывает его себе в тетрадку. В некоторый момент в Митиной тетради записаны числа: 1; 2; 3; 2,5; 3; 2,5; 2; 2; 2; 2,5.

а) (6 – 11 классы, 1 балл) Какое число записано на доске четвёртым?

б) (6 – 11 классы, 2 балла) Какое число записано на доске восьмым?

Решение. а) Первое число, очевидно, единица. Тогда, чтобы медиана двух первых чисел была равна 2, второе число должно быть равно 3.

Для наглядности будем писать Ванины числа. Ваня написал третье число a_3:

$$1 \qquad 3 \qquad a_3.$$

Медиана теперь равна 3, а это может быть, только если $a_3 \ge 3$. Добавим очередное число:

$$1 \qquad 3 \qquad a_3 \ge 3 \qquad a_4.$$

Если $a_4 \ge 3$, то медиана полученного набора тоже не меньше, чем 3. Но она по условию равна 2,5. Следовательно, $a_4 < 3$. Если $a_4 \le 1$, то медиана будет равна 2. Но она равна 2,5. Значит, $1 < a_4 < 3$. В этом случае медиана равна $\frac{a_4+3}{2}$. Из уравнения

$$\frac{a_4+3}{2} = 2{,}5$$

находим: $a_4 = 2$.

б) Продолжим наши рассуждения. Припишем пятое число и получим ряд

$$1 \qquad 3 \qquad a_3 \ge 3 \qquad 2 \qquad a_5.$$

Медиана будет равна 3, только если $a_5 \ge 3$.

Добавим шестое число:

$$1 \qquad 3 \qquad a_3 \ge 3 \qquad 2 \qquad a_5 \ge 3 \qquad a_6.$$

Медиана снова уменьшилась до 2,5. Это возможно, только если $a_6 \le 2$.

Добавляем седьмое число. Теперь медиана 2. Чтобы понять, какое число a_7, расставим шесть чисел по порядку, насколько это возможно (нам важно понять, где числа находятся по отношению к медиане), а седьмое число припишем снизу:

$$1 \qquad a_6 \le 2 \qquad 2 \qquad 3 \qquad a_3 \ge 3 \qquad a_5 \ge 3$$

$$a_7$$

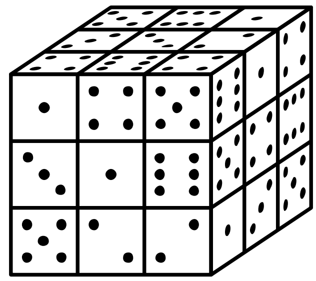
Теперь видно, что $a_7 \le 2$, иначе чисел, которые не больше двух, станет 3, то есть меньше половины общего количества чисел. Добавим восьмое число:

$$1 \qquad a_6 \le 2 \qquad a_7 \le 2 \qquad 2 \qquad 3 \qquad a_3 \ge 3 \qquad a_5 \ge 3$$

$$a_8$$

Медиана осталась числом 2. Если $a_8 > 2$, то медиана будет больше, чем $\frac{2+2}{2} = 2$. Значит, $a_8 \le 2$. При этом, если $a_6 = 2$ или $a_7 = 2$, то a_8 – любое число, не большее, чем 2. Если же $a_6 < 2$ и $a_7 < 2$, то $a_8 = 2$.

Ответ: а) 2; б) если шестое или седьмое число равно 2, то восьмое число – не больше, чем 2; если и шестое и седьмое число меньше 2, то восьмое число равно 2. Других вариантов нет.



11. Большой кубик. Из 27 игральных кубиков сложен куб.

а) (6 – 11 классы, 1 балл) Найдите вероятность того, что на поверхности куба оказалось ровно 25 шестерок.

б) (7 – 11 классы, 1 балл) Найдите вероятность того, что на поверхности куба оказалась хотя бы одна единица.

в) (8 – 11 классы, 1 балл) Найдите математическое ожидание числа шестёрок, смотрящих наружу.

г) (8 – 11 классы, 1 балл) Найдите математическое ожидание суммы чисел, которые оказались на поверхности куба.

д) (9 – 11 классы, 3 балла) Найдите математическое ожидание случайной величины: «Число различных цифр, оказавшихся на поверхности куба».

Решение. а) Один из 27 кубиков в центре и поэтому не виден вовсе. Остальные 26 кубиков видны. Значит, нужное событие

$$A = \{25\ шестерок\}$$

состоит в том, что все кубики смотрят шестерками наружу, кроме одного – назовем его **особым** кубиком.

Рассмотрим все кубики. Если кубик в центре одной из граней, то он «показывает» шестерку с вероятностью $\frac{1}{6}$, а с вероятностью $\frac{5}{6}$ он показывает не шестерку. Если он находится в середине ребра, то видны две его грани, поэтому шестерка на нем видна с вероятностью $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, и шестерка не видна с вероятностью $\frac{2}{3}$. Наконец, если кубик находится в вершине большого куба, то видно три его грани, поэтому с вероятностью $\frac{1}{2}$ на нем видно шестерку, а с вероятностью $\frac{1}{2}$ шестерки не видно.

Особый кубик может оказаться в центре одной из граней с вероятностью

$$\frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

– здесь перемножаются вероятности независимых событий «особый кубик смотрит наружу одной из пяти граней, но не шестеркой», «5 других кубиков в центре граней смотрят наружу шестерками», «на всех 12 кубиках в серединах ребер видна шестерка» и «на всех 8 кубиках в вершинах видна шестерка».

Особый кубик расположен на ребре с вероятностью

$$\left(\frac{1}{6}\right)^6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{11} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8.$$

И, наконец, этот особый кубик может быть в вершине большого куба с вероятностью

$$\left(\frac{1}{6}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

Нужно учесть, что граней 6, значит и кубиков, расположенных в центрах граней тоже 6. Еще куб имеет 12 кубиков в серединах ребер и 8 – в вершинах. Особый кубик может оказаться любым из них, при этом все эти события несовместны. Тогда, складывая их вероятности, находим вероятность события A:

$$P(A) = 6\cdot\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{12}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8 + 12\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^6\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{11}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8 + 8\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{12}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7 =$$

$$=\left(\frac{1}{6}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{11}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7\cdot\left(6\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + 12\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + 8\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right) =$$

$$=\left(\frac{1}{6}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{11}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7\cdot\left(\frac{15+12+4}{6\cdot 3}\right) =$$

$$=\frac{1}{6^5\cdot 3^{11}\cdot 2^7}\cdot\frac{31}{18} = \frac{31}{2^{13}\cdot 3^{18}} \approx 9{,}76763\cdot 10^{-12}.$$

б) Ни одной единицы нет на поверхности куба с вероятностью

$$\left(\frac{5}{6}\right)^6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{12}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{5^6}{2^2\cdot 3^{18}}.$$

Следовательно, хотя бы одна единица будет с вероятностью

$$1-\frac{5^6}{2^2\cdot 3^{18}} \approx 0{,}999989917.$$

в) Рассмотрим кубики, расположенные в центрах граней. Таких кубиков шесть. Введем случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_6$ по одной для каждого из этих кубиков:

$$\xi_k = \begin{cases} 1, \textit{если на } k-\textit{м кубике видна шестерка}, \\ 0, \textit{если шестерка на } k-\textit{м кубике не видна}. \end{cases}$$

Такие случайные величины называются **индикаторами**. В данном случае – это индикаторы событий «на k-м центральном кубике видна шестерка».

Аналогично введем индикаторы $\eta_1, ..., \eta_{12}$ шестерок для каждого из 12 кубиков, расположенных в серединах ребер. И, наконец, введем индикаторы шестерок $\zeta_1, ..., \zeta_8$ для 8 кубиков, расположенных в вершина большого куба. Тогда число шестерок на поверхности большого куба равно сумме всех индикаторов:

$$X = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_6 + \eta_1 + ... + \eta_{12} + \zeta_1 + ... + \zeta_8.$$

Ожидания величин ξ_k равны между собой и равны $\mathrm{E}\xi_k = 0\cdot\frac{5}{6} + 1\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$. Точно так же, $E\eta_k = 0\cdot\frac{4}{6} + 1\cdot\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. И, наконец, $E\zeta_k = 0\cdot\frac{3}{6} + 1\cdot\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Следовательно,

$$\mathrm{E}X = 6\mathrm{E}\xi_1 + 12\mathrm{E}\eta_1 + 8\mathrm{E}\zeta_1 = 6\cdot\frac{1}{6} + 12\cdot\frac{1}{3} + 8\cdot\frac{1}{2} = 9.$$

г) Наружу выглядывают 54 грани, на каждой в среднем 3,5 очка. Итого

$$54 \cdot 3{,}5 = 189.$$

д) Используем пункт б). Введем для каждого числа очков k от 1 до 6 индикатор:

$$\xi_k = \begin{cases} 1, \textit{ если число очков } k \textit{ видно на поверхности куба хоть раз}, \\ 0, \textit{ если на поверхности куба число } k \textit{ отсутствует}. \end{cases}$$

Ожидание каждой такой величины можно найти, используя результат, полученный в пункте б):

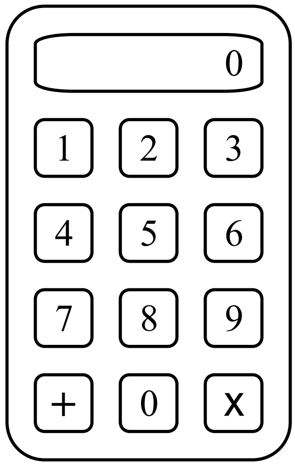
$$\mathrm{E}\xi_k = 1 \cdot \left(1 - \frac{5^6}{2^2 \cdot 3^{18}}\right) + 0 \cdot \frac{5^6}{2^2 \cdot 3^{18}} = 1 - \frac{5^6}{2^2 \cdot 3^{18}}.$$

Тогда ожидание случайной величины Y «число различных очков, видных на поверхности куба» равно

$$\mathrm{E}Y = \mathrm{E}\left(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_6\right) = 6\mathrm{E}\xi_1 = 6 \cdot \left(1 - \frac{5^6}{2^2 \cdot 3^{18}}\right) = 6 - \frac{5^6}{2 \cdot 3^{17}} \approx 5{,}99.$$

Ответ: а) $\frac{31}{2^{13} \cdot 3^{18}} \approx 9{,}77 \cdot 10^{-12}$; б) $1 - \frac{5^6}{2^2 \cdot 3^{18}} \approx 0{,}99998992$; в) 9; г) 189; д) $6 - \frac{5^6}{2 \cdot 3^{17}} \approx 5{,}99$.

12. Калькулятор. (8 – 11 классы, 2 балла) На клавиатуре калькулятора есть цифры от 0 до 9 и знаки двух действий (см. рисунок). Вначале на дисплее написано число 0. Можно нажимать любые клавиши. Калькулятор выполняет действия в последовательности нажатий. Если знак действия нажать подряд несколько раз, то калькулятор запомнит только последнее нажатие. Рассеянный Учёный нажал очень много кнопок в случайной последовательности. Найдите приблизительно вероятность, с которой результат получившейся цепочки действий нечетное число?



Решение. Будем говорить, что Учёный проделал n шагов, если он набрал n чисел, а между ними $n-1$ раз совершил какие-то арифметические действия. Обозначим p_n вероятность того, что после n шагов на калькуляторе будет нечётное число, и выразим p_{n+1} через p_n.

Если последним действием было умножение, то результат будет нечётным, только если оба множителя нечётны, так что p_{n+1} в этом случае равна $\frac{1}{2}p_n$.

Если последним действием было сложение, то результат будет нечётным, если последнее слагаемое отличается от предпоследнего четностью. Поэтому в этом случае p_{n+1} равна $\frac{1}{2}$.

Последнее действие может быть как умножением, так и делением, и оба этих варианта равновозможны. Поэтому формула полной вероятности дает:

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}p_n.$$

Применяя полученную формулу повторно, получаем:

$$p_{n+1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}p_{n-1}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}p_{n-1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{64}p_{n-2}=\ldots=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{4^n}p_1.$$

Очевидно, $p_1=\frac{1}{2}$. Получаем:

$$p_{n+1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{2^{2n+1}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}+\frac{1}{2^{2n+1}}=\frac{1}{3}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)+\frac{1}{2^{2n+1}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6\cdot 4^n}.$$

Если n велико, это выражение будет очень близко к $\frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}+\frac{1}{6\cdot 4^n}$, при больших n эта вероятность очень близка к $\frac{1}{3}$.

13. Игра «Уникум». Петя и еще 9 человек играют в такую игру: каждый бросает игральную кость. Игрок получает приз, если он выбросил число очков, которое не удалось выбросить никому больше.
а) (6 – 11 классы, 1 балл) Какова вероятность того, что Петя получит приз?
б) (8 – 11 классы, 3 балла) Какова вероятность того, что хоть кто-то получит приз?

Решение. а) Предположим (исключительно для наглядности), что Петя бросает прежде всех. Он выбросил какое-то количество очков. Вероятность того, что каждый следующий игрок выбросит другое число очков, равна $\frac{5}{6}$. Поскольку броски независимы, вероятность того, что девять оставшихся игроков выбросят не то, что Петя, равна $\left(\frac{5}{6}\right)^9\approx 0{,}194$.

б) Пронумеруем игроков и рассмотрим события $A_j=\{j-\textit{й игрок получит приз}\}$, где $j=1,2,...,10$. Из решения пункта а) видно, что

$$\mathrm{P}(A_1)=\left(\frac{5}{6}\right)^9.$$

Вероятность того, что первые два игрока получат призы, находим аналогично:

$$\mathrm{P}\left(A_1 \cap A_2\right) = 1 \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^8 = \frac{5 \cdot 4^8}{6^8}.$$

Точно так же – вероятность того, что первые k игроков получат призы, равна

$$\mathrm{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k\right) = 1 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{7-k}{6} \cdot \left(\frac{6-k}{6}\right)^{10-k}, \text{ где } k = 1, \ldots, 6.$$

Нас интересует вероятность события $A = \{\textit{хоть один игрок получит приз}\}$. Это событие является объединением событий A_j: $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{10}$. По формуле вероятности объединения событий (иногда ее называют формулой включения-исключения) находим:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) = {} & \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \ldots + \mathrm{P}(A_{10}) - \\ & -\left(\mathrm{P}(A_1 \cap A_2) + \mathrm{P}(A_1 \cap A_3) + \ldots + \mathrm{P}(A_9 \cap A_{10})\right) + \\ & +\left(\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \ldots + \mathrm{P}(A_8 \cap A_9 \cap A_{10})\right) - \\ & - \ldots \\ & \ldots - \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{10}).\end{aligned}$$

Формула выглядит страшновато, но суть её проста – складываются вероятности выигрыша каждого, затем вычитаются вероятности выигрыша каждых двух, затем прибавляются вероятности выигрыша каждых трех и так далее. Последнее слагаемое (с минусом) – вероятность одновременного выигрыша всех десяти. На самом деле, больше пяти игроков выиграть не могут, поэтому все слагаемые, где есть вероятности одновременного выигрыша шести и более игроков, равны нулю. Заметим еще, что в каждой строке слагаемые одинаковы, а их число равно C_{10}^k, где $k = 1, \ldots, 5$ – номер строки. Например, слагаемых вида $\mathrm{P}\left(A_i \cap A_j\right)$ ровно $C_{10}^2 = 45$.

Учитывая два последних замечания, получаем:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) = {} & C_{10}^1 \mathrm{P}(A_1) - C_{10}^2 \mathrm{P}(A_1 \cap A_2) + C_{10}^3 \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - C_{10}^4 \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) + \\ & + C_{10}^5 \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = \\ = {} & 10 \cdot \frac{5^9}{6^9} - 45 \cdot \frac{5 \cdot 4^8}{6^9} + 120 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3^7}{6^9} - 210 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2^6}{6^9} + 252 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1^5}{6^9} \approx 0{,}919.\end{aligned}$$

Удивительно, но вероятность того, что выиграет хотя бы один игрок, весьма велика.

Ответ: а) $\left(\frac{5}{6}\right)^9 \approx 0{,}194$; б) прибл. $0{,}919$.

14. Что? Где? Когда? В игре «Что? Где? Когда?» разыгрываются 13 конвертов с вопросами от телезрителей. Конверты выбираются по очереди в случайном порядке с помощью волчка. Если знатоки отвечают верно, зарабатывают очко, если неверно — одно очко достается телезрителям. Игра оканчивается, как только одна из команд набрала 6 очков.

Предположим, что силы команд Знатоков и Телезрителей равны.

а) (8 – 11 классы, 2 балла) Найдите математическое ожидание числа очков, набранных командой Знатоков за 100 игр.
б) (8 – 11 классы, 1 балл) Найдите вероятность того, что в следующей игре конверт номер 5 будет разыгран.
Решение. а) Предположим, что за одну игру проигравшая команда заработала k очков. Выигравшая команда заработала 6 очков, поэтому всего было разыграно $6+k$ конвертов. При этом за вопрос из последнего конверта очко обязательно получила выигравшая команда, а за остальные $5+k$ вопросов очки могла получить как та, так и другая команда с вероятностью 1/2. Поэтому математическое ожидание случайной величины X «число очков, заработанных проигравшей командой за одну игру» равно

$$\mathrm{E}X = 0\cdot C_5^0\cdot\frac{1}{2^5}+1\cdot C_6^1\cdot\frac{1}{2^6}+\ldots+kC_{5+k}^k\frac{1}{2^{5+k}}+\ldots+5C_{10}^5\frac{1}{2^{10}}.$$

Пользуемся тем, что $kC_n^k=(n-k+1)C_n^{k-1}$. В нашем случае это дает: $kC_{5+k}^k=6C_{5+k}^{k-1}$;

$$\mathrm{E}X=6\cdot C_6^0\cdot\frac{1}{2^6}+\ldots+6C_{5+k}^{k-1}\frac{1}{2^{5+k}}+\ldots+6C_{10}^4\frac{1}{2^{10}}=6\left(C_6^0\cdot\frac{1}{2^6}+\ldots+C_{5+k}^{k-1}\frac{1}{2^{5+k}}+\ldots+C_{10}^4\frac{1}{2^{10}}\right)=$$

$$=6\left(C_6^0\cdot\frac{1}{2^6}+\ldots+C_{5+k}^{k-1}\frac{1}{2^{5+k}}+\ldots+C_{10}^4\frac{1}{2^{10}}+C_{11}^5\frac{1}{2^{11}}+C_{12}^6\frac{1}{2^{12}}\right)-6\left(C_{11}^5\frac{1}{2^{11}}+C_{12}^6\frac{1}{2^{12}}\right).$$

В первой скобке сумма вероятностей того, что при игре до 7 побед проигравшая команда заработает $k-1$ очков ($1\le k\le 7$); она равна 1.

$$\mathrm{E}X=6-\frac{6}{2^{12}}\left(2C_{11}^5+C_{12}^6\right)=6-\frac{6}{2^{12}}\left(C_{11}^5+C_{11}^6+C_{12}^6\right)=6-\frac{6}{2^{12}}\cdot 2C_{12}^6=6-\frac{6C_{12}^6}{2^{11}}.$$

Прибавляем 6, чтобы получить общую сумму очков (заработанных обеими командами), делим на два, чтобы получить только ожидание суммы очков знатоков (ведь силы равны): $6-\frac{6C_{12}^6}{2^{12}}$. Теперь осталось умножить результат на 100, поскольку прошло 100 игр.

б) Снова применим метод индикаторов. Введём случайные величины ξ_k, $1\le k\le 13$:

$$\xi_k=\begin{cases}1, \textit{если конверт с номером } k \textit{ был разыгран},\\ 0, \textit{если конверт с номером } k \textit{ не был разыгран}.\end{cases}$$

Заметим, что сумма очков, заработанных обеими командами за одну игру, равна сумме всех ξ_k. Ожидание суммы очков, заработанных обеими командами, известно: $12\cdot\left(1-\frac{C_{12}^6}{2^{12}}\right)$. Все конверты равноправны, поэтому найденное число делим на 13: $\mathrm{E}\xi_k=\frac{12}{13}\cdot\left(1-\frac{C_{12}^6}{2^{12}}\right)$. Но ожидание ξ_k — это и есть вероятность розыгрыша конверта номер k.

Ответ: а) $600\cdot\left(1-\frac{C_{12}^{6}}{2^{12}}\right)\approx 465$; б) $\frac{12}{13}\cdot\left(1-\frac{C_{12}^{6}}{2^{12}}\right)\approx 0,715$.

15. Fish or chicken? На борту авиалайнера 2n пассажиров, и авиакомпания загрузила для них n порций питания с курицей и n порций с рыбой. Известно, что пассажир с вероятностью 0,5 предпочитает курицу, и с вероятностью 0,5 — рыбу. Назовём пассажира недовольным, если ему осталось не то, что он предпочитает.

а) (8 – 11 классы, 2 балла) Найдите наиболее вероятное число недовольных пассажиров.

б) (9 – 11 классы, 3 балла) Найдите математическое ожидание числа недовольных пассажиров.

в) (9 – 11 классы, 4 балла) Найдите дисперсию числа недовольных пассажиров.

Решение. а) Число недовольных пассажиров может быть любым от 0 до n. Будем считать, что $n>1$, поскольку в случае $n=1$ решение очевидно: недовольных либо нет, либо один, причем оба случая равновозможны.

Введем случайную величину ξ «Число недовольных». $\xi=0$, только если ровно n пассажиров предпочитают курицу, а n остальных – рыбу. Будем считать успехом событие «пассажир хочет курицу». Тогда

$$\mathrm{P}\left(\xi=0\right)=\mathrm{P}\left(\left\{\textit{наступило n успехов в серии из } 2n \textit{ испытаний}\right\}\right)=C_{2n}^{n}\frac{1}{2^{2n}}.$$

Ровно один пассажир будет недоволен, если число пассажиров, предпочитающих курицу, отличается от n на единицу, то есть число успехов равно $n\pm 1$. Поэтому

$$\mathrm{P}\left(\xi=1\right)=\mathrm{P}\left(\left\{n+1 \textit{ успехов в серии из } 2n \textit{ испытаний}\right\}\right)+$$

$$+\mathrm{P}\left(\left\{n-1 \textit{ успехов в серии из } 2n \textit{ испытаний}\right\}\right)=C_{2n}^{n+1}\frac{1}{2^{2n}}+C_{2n}^{n-1}\frac{1}{2^{2n}}=2C_{2n}^{n-1}\frac{1}{2^{2n}}.$$

Рассуждая так же, найдём, что k недовольных пассажиров случится с вероятностью

$$\mathrm{P}\left(\xi=k\right)=2C_{2n}^{n-k}\frac{1}{2^{2n}}, \text{ где } k=1,2,...,n.$$

В последовательности чисел C_{2n}^{m} всего $2n+1$ число (это $2n-$я строка треугольника Паскаля). Сначала эти числа возрастают при $m=0,1,...,n$, а потом убывают при $m=n,n+1,...,2n$. При этом среднее число C_{2n}^{n} больше других, но оно меньше, чем удвоенное предыдущее[1]: $C_{2n}^{n}<2C_{2n}^{n-1}$ (равенство наступает только при $n=1$).

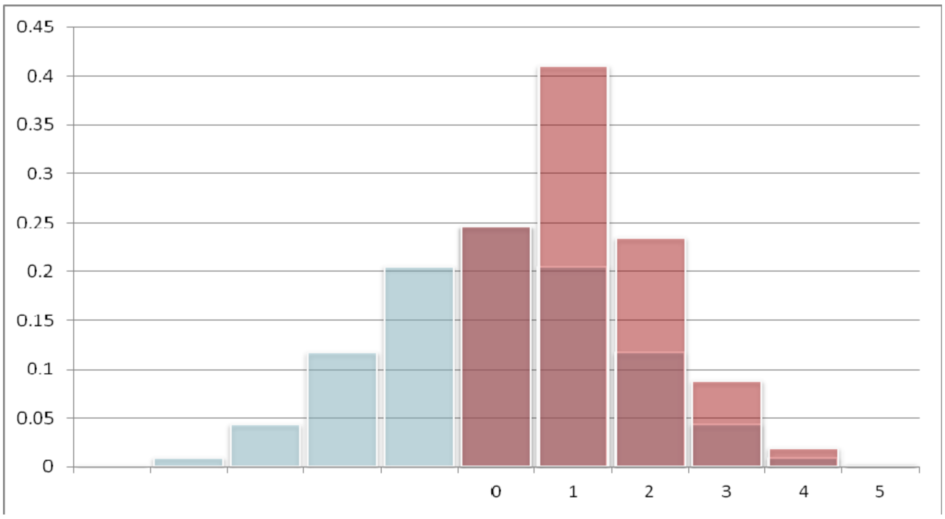
Таким образом, при $n>1$

$$\mathrm{P}\left(\xi=0\right)<\mathrm{P}\left(\xi=1\right)>\mathrm{P}\left(\xi=2\right)>...>\mathrm{P}\left(\xi=n\right).$$

[1] Действительно,

$$2C_{2n}^{n-1}=\frac{2\left(2n\right)!}{\left(n-1\right)!\left(n+1\right)!}=\frac{2n\left(2n\right)!}{\left(n-1\right)!\cdot n\cdot n!\left(n+1\right)}=\frac{2n}{n+1}\frac{\left(2n\right)!}{n!\cdot n!}=\frac{2n}{n+1}C_{2n}^{n}>C_{2n}^{n}.$$

Результат проиллюстрирован на диаграмме распределения случайной величины ξ при $n=5$. Для сравнения бледным цветом на том же рисунке дана диаграмма биномиального распределения $\frac{1}{2^{10}}C_{10}^{k}$.



Таким образом, наиболее вероятное число недовольных – один. Это неожиданный результат – мода распределения ξ действительно не зависит от n.

б) Найдем математическое ожидание величины $\xi+n$:

$$\mathrm{E}(\xi+n)=n\mathrm{P}(\xi=0)+(n+1)\mathrm{P}(\xi=1)+(n+2)\mathrm{P}(\xi=2)+\ldots+2n\mathrm{P}(\xi=n)=$$

$$=nC_{2n}^{n}\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{2^{2n-1}}\left((n+1)C_{2n}^{n-1}+(n+2)C_{2n}^{n-2}+\ldots+(n+k)C_{2n}^{n-k}+\ldots+2nC_{2n}^{0}\right).$$

Сделаем преобразование:

$$(n+k)C_{2n}^{n-k}=\frac{(n+k)\cdot(2n)!}{(n-k)!(n+k)!}=\frac{(2n)!}{(n-k)!(n+k-1)!}=\frac{2n\cdot(2n-1)!}{(n-k)!(n+k-1)!}=2nC_{2n-1}^{n-k}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{E}(\xi+n)=nC_{2n}^{n}\frac{1}{2^{2n}}+\frac{2n}{2^{2n-1}}\left(C_{2n-1}^{n-1}+C_{2n-1}^{n-2}+\ldots+C_{2n-1}^{n-k}+\ldots+C_{2n-1}^{0}\right).$$

В скобках стоит сумма первой половины всех чисел $(2n-1)$-й строки треугольника Паскаля. Сумма всех чисел этой строки равна 2^{2n-1}, следовательно, сумма в скобках равна 2^{2n-2}.

$$\mathrm{E}(\xi+n)=nC_{2n}^{n}\frac{1}{2^{2n}}+\frac{2n}{2^{2n-1}}2^{2n-2}=nC_{2n}^{n}\frac{1}{2^{2n}}+n.$$

Тогда $\mathrm{E}\xi=\mathrm{E}(\xi+n)-n=\dfrac{nC_{2n}^{n}}{2^{2n}}$.

Найдем это число приближенно с помощью формулы Стирлинга $m!\approx\sqrt{2\pi m}\cdot m^{m}e^{-m}$:

$$\mathrm{E}\xi\approx\frac{n}{2^{2n}}\frac{\sqrt{2\pi\cdot 2n}\,(2n)^{2n}e^{-2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\cdot n^{n}e^{-n}\right)^{2}}=\frac{n}{2^{2n}}\frac{\sqrt{4\pi n}\,2^{2n}n^{2n}e^{-2n}}{2\pi n\cdot n^{2n}e^{-2n}}=\sqrt{\frac{n}{\pi}}.$$

Если на борту, скажем, 400 пассажиров, следует в среднем ожидать, что $\sqrt{\frac{200}{\pi}} \approx 8$ из них окажутся недовольны. Это не означает, что можно решить все проблемы с недовольными пассажирами, имея всего 8 запасных комплектов питания каждого вида. Чтобы все были довольны с вероятностью не менее, скажем 0,95, комплектов нужно несколько больше, чем ожидание числа недовольных. Если пассажиров 400, то недовольных не окажется почти наверняка (с вероятностью более чем 0,95), если взять лишних 42 комплекта – по 21 комплекту каждого вида (проверьте). Напомним, что мы проводим расчёт в упрощенной ситуации. В жизни, наверно, вероятности предпочтения рыбы и курицы не одинаковы. Если бы мы это учли, выкладки были бы примерно такими же, как сейчас, но намного более громоздкими, и такие красивые результаты не получились бы.

в) Чтобы найти дисперсию, вычислим ожидание $\mathrm{E}\xi^2$:

$$\mathrm{E}\xi^2 = 0^2\mathrm{P}(\xi=0)+1^2\cdot\mathrm{P}(\xi=1)+2^2\cdot\mathrm{P}(\xi=2)+\ldots+n^2\mathrm{P}(\xi=n)=$$

$$=0^2\frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}+1^2\cdot\left(\frac{C_{2n}^{n-1}}{2^{2n}}+\frac{C_{2n}^{n+1}}{2^{2n}}\right)+2^2\cdot\left(\frac{C_{2n}^{n-2}}{2^{2n}}+\frac{C_{2n}^{n+2}}{2^{2n}}\right)+\ldots+n^2\left(\frac{C_{2n}^{n-n}}{2^{2n}}+\frac{C_{2n}^{n+n}}{2^{2n}}\right).$$

Раскрывая скобки и переписывая слагаемые в другом порядке, получим:

$$\mathrm{E}\xi^2=(0-n)^2\frac{C_{2n}^0}{2^{2n}}+(1-n)^2\frac{C_{2n}^1}{2^{2n}}+\ldots+(n-n)^2\frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}+\ldots+(2n-n)^2\frac{C_{2n}^{2n}}{2^{2n}}.$$

Это выражение в точности равно дисперсии случайной величины η «число успехов в серии из $2n$ испытаний Бернулли с вероятностью успеха 0,5». Она равна[2]

$$\mathrm{E}\xi^2=\mathrm{D}\eta=2n\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5=\frac{n}{2}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{D}\xi=\mathrm{E}\xi^2-(\mathrm{E}\xi)^2=\frac{n}{2}-\left(\frac{nC_{2n}^n}{2^{2n}}\right)^2.$$

Пользуясь приближенным значением ожидания $\mathrm{E}\xi\approx\sqrt{\frac{n}{\pi}}$, получаем:

$$\mathrm{D}\xi\approx\frac{n}{2}-\frac{n}{\pi}=\frac{\pi-2}{2\pi}n\approx 0{,}182n.$$

Ответ: а) Если $n>1$, то наиболее вероятен один недовольный; если $n=1$, то с равными вероятностями либо имеется один недовольный, либо недовольных нет вовсе;

б) $\frac{nC_{2n}^n}{2^{2n}}\approx\sqrt{\frac{n}{\pi}}\approx 0{,}564\sqrt{n}$; в) $\frac{n}{2}-\left(\frac{nC_{2n}^n}{2^{2n}}\right)^2\approx\frac{\pi-2}{2\pi}n\approx 0{,}182n$.

16. ЕГЭ в Анчурии. (7 – 11 классы, 2 балла) . В Анчурии проходит единый государственный экзамен. Вероятность угадать верный ответ на каждый вопрос экзамена равна 0,25. В 2011 году, чтобы получить аттестат, нужно было ответить верно на

---

[2] Случайная величина «Число успехов в серии из m испытаний Бернулли» распределена по биномиальному закону $C_m^k p^k q^{m-k}$, где p — вероятность успеха в одном испытании, $q=1-p$ и $k=0,1,\ldots,m$ – возможное число успехов. Дисперсия вычисляется по известной формуле mpq.

3 вопроса из 20. В 2012 году Управление школ Анчурии решило, что 3 вопроса это мало. Теперь нужно верно ответить на 6 вопросов из 40. Спрашивается, если ничего не знать, а просто угадывать ответы, в каком году вероятность получить анчурийский аттестат выше — в 2011 или в 2012?

Решение. Если выпускник угадывает ответы, ЕГЭ можно рассматривать как схему Бернулли с вероятностью успеха $p=0,25$ и вероятностью неудачи $q=0,75$. В 2011 году, чтобы сдать экзамен, нужно было правильно ответить, по крайней мере, на 3 вопроса. Удобнее найти вероятность противоположного события, то есть вероятность ответить менее чем на 3 вопроса. Она равна сумме вероятностей того, что выпускник ответил на 0, на 1 и на 2 вопроса, то есть $\sum_{k=0}^{2} C_{20}^{k} p^k q^{20-k}$. С помощью табличного процессора находим, что эта вероятность приближённо равна 0,091; следовательно, вероятность сдать экзамен приближённо равна 0,909.

Аналогично находим, что в 2012 году вероятность провалиться на экзамене равна

$$\sum_{k=0}^{5} C_{40}^{k} p^k q^{40-k} \approx 0,043,$$

а вероятность сдать экзамен приближённо равна 0,957.

Ответ: в 2012 году вероятность получить аттестат выше.

Три задачи про носки

17. Удачные пары. Вася купил n пар одинаковых носков. В течение n дней Вася не знал проблем: каждое утро брал из шкафа новую пару и носил ее целый день. Через n дней Васина мама постирала все носки в стиральной машине и разложила их по парам, как получилось, поскольку, повторим, носки одинаковые. Назовем пару носков удачной, если оба носка в этой паре были на Васе в один и тот же день.

а) (7 – 11 классы, 2 балла) Найти вероятность того, что все получившиеся пары удачные.

б) (8 – 11 классы, 3 балла) Доказать, что матожидание числа удачных пар больше 0,5.

Решение. а) Вероятность того, что первая пара оказалась удачной, равна $\frac{1}{2n-1}$, поскольку, когда мама взяла первый носок в руки, осталось $2n-1$ носков, и только один из них составляет удачную пару с первым. Далее – так же: вероятность того, что вторая пара удачная (при условии, что первая пара удачная) равна $\frac{1}{2n-3}$ и т.д. Вероятность того, что все пары удачные, получаем как произведение

$$\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2n-3}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{(2n-1)!!}=\frac{(2n)!!}{(2n)!}=\frac{2^n n!}{(2n)!}.$$

(Двойным факториалом $m!!$ натурального числа m называется произведение всех натуральных чисел, не превосходящих m и имеющих с ним одну чётность. Если m нечётно, то $m!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m$, а если m чётно, то $m!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot m$.)

Чтобы найти приближенное выражение, применим формулу Стирлинга для факториалов: $m! \approx \sqrt{2\pi m} \cdot m^m e^{-m}$:

$$\frac{2^n n!}{(2n)!} \approx \frac{2^n \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}}{\sqrt{4\pi n} \cdot (2n)^{2n} e^{-2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{e}{2n} \right)^n.$$

б) Вероятность того, что каждая одна пара удачная, найдена в пункте а) – она равна $\frac{1}{2n-1}$. Пронумеруем пары числами от 1 до n и воспользуемся методом индикаторов. Пусть

$$\xi_k = \begin{cases} 1, \textit{если } k - \textit{я пара удачная}, \\ 0, \textit{если } k - \textit{я пара неудачная}. \end{cases}$$

Тогда

$$\mathrm{E}\xi_k = 1 \cdot \frac{1}{2n-1} + 0 \cdot \frac{2n-2}{2n-1} = \frac{1}{2n-1}.$$

Случайная величина X «число удачных пар» равна сумме индикаторов:

$$X = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n.$$

Тогда

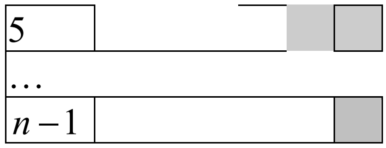
$$\mathrm{E}X = n\mathrm{E}\xi_1 = \frac{n}{2n-1} > \frac{1}{2}.$$

Конец доказательства.

Ответ: а) $\frac{2^n n!}{(2n)!} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{e}{2n} \right)^n$.

18. (10 – 11 классы, 5 баллов) Любимая пара. На сушке в случайном порядке (как достали из стиральной машины) висит n носков. Среди них — два любимых носка Рассеянного Учёного. Носки загорожены сохнущей простыней, поэтому Учёный их не видит, и достает по одному носку на ощупь. Найдите математическое ожидание числа носков, снятых Ученым к моменту, когда у него окажутся оба любимых носка.

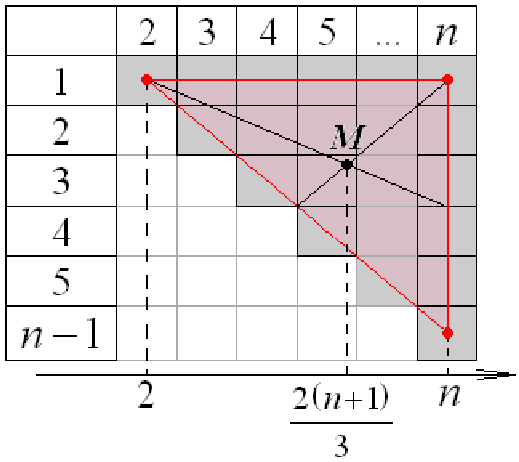
	2	3	4	5	...	n
1						
2			X			
3						
4						



Решение. Удобно составить треугольную таблицу. Закрашенные ячейки соответствуют парам любимых носков. Например, пара $(2;4)$, помеченная знаком «X», соответствует случаю, когда первый любимый носок попался вторым, а второй – четвертым по счету. Все пары равновозможны, а общее их число равно C_n^2.

В таблице видно распределение случайной величины ξ «Число снятых носков». По сути, таблица представляет собой перевернутую диаграмму этого распределения: значения ξ берутся из первой строки, а соответствующие вероятности изображены под ними закрашенными столбиками.

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & \ldots & k & \ldots & n \\ \dfrac{1}{C_n^2} & \dfrac{2}{C_n^2} & \ldots & \dfrac{k-1}{C_n^2} & & \dfrac{n-1}{C_n^2} \end{pmatrix}$$



Найдем математическое ожидание:

$$\mathrm{E}\xi = \frac{1}{C_n^2}\sum_{k=2}^{n} k(k-1) = \frac{1}{C_n^2}\left(\sum_{k=2}^{n} k^2 - \sum_{k=2}^{n} k\right) =$$

$$= \frac{1}{C_n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k\right) = \frac{1}{C_n^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)n}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{C_n^2}\frac{n(n+1)(2n-2)}{6} = \frac{1}{C_n^2}\frac{n(n+1)(n-1)}{3} = \frac{2(n+1)}{3}.$$

Возможно геометрическое решение: математическое ожидание – абсцисса центра масс M диаграммы. Изобразим вспомогательный треугольник с тем же центром масс и найдем абсциссу. Она равна среднему арифметическому абсцисс вершин:

$$\frac{n+n+2}{3} = \frac{2(n+1)}{3}.$$

19. Первая пара. (10 – 11 классы, 6 баллов). На сушке в случайном порядке (как достали из стиральной машины) висит n пар носков. Двух одинаковых пар нет. Носки висят за сохнущей простыней, поэтому Рассеянный Ученый, а достает по одному носку на ощупь и сравнивает каждый новый носок со всеми предыдущими. Найдите математическое ожидание числа носков, снятых к моменту, когда у Учёного окажется какая-нибудь пара.

Решение. Назовем ξ_n случайную величину, равную числу снятых носков при условии, что на сушке висит n пар. Очевидно, $\mathrm{E}\xi_1 = 2$. Пусть теперь $n > 1$. Попробуем установить рекуррентную связь между ξ_n и ξ_{n-1}. Пронумеруем носки в том порядке, в каком Рассеянный Ученый их снимает с сушки. Очевидно, способ нумерации не играет роли. В этой нумерации какой-то носок является последним (его номер $2n$, и он никогда не будет снят, поскольку носок с номером $n+1$ наверняка образует пару с каким-либо предыдущим). Отличим как-нибудь этот последний носок. Пусть он будет белым.

Обозначим $p_{j,n}$ вероятность события $\xi_n = j$. Очевидно, $p_{1,n} = 0$.

Найдем $p_{2,n}$. Все зависит от того, где висит другой белый носок. Если он висит на первом месте (вероятность этого $\frac{1}{2n-1}$), то второй носок не может образовать с ним пару. В этом случае $p_{2,n} = 0$.

Если другой белый носок висит на втором месте (вероятность этого $\frac{1}{2n-1}$), то же самое – $p_{2,n} = 0$.

Если он висит на третьем или последующих местах (вероятность этого равна $\frac{2n-3}{2n-1}$), то $p_{2,n} = p_{2,n-1}$ – это вероятность получить пару со второй попытки, выбрасывая из последовательности оба белых носка. По формуле полной вероятности получаем:

$$p_{2,n} = \frac{2n-3}{2n-1} p_{2,n-1} .$$

Будем рассуждать так же относительно $p_{3,n}$.

1. Если белый носок висит на одном из двух первых мест (с вероятностью $\frac{2}{2n-1}$), то вероятность того, что третий носок даст пару, равна вероятности того, что второй носок даст пару в последовательности без белых носков: $p_{3,n} = p_{2,n-1}$.

2. Если белый носок на третьем месте (вероятность $\frac{1}{2n-1}$), то вероятность того, что третий носок даст пару, равна 0, поскольку он белый, а парный к нему висит в конце и потому недоступен.

3. Если белый носок висит далее третьего места (вероятность $\frac{2n-4}{2n-1}$), то вероятность того, что третий носок даст пару, равна $p_{3,n-1}$, поскольку в этом случае наличие белых носков роли не играет. Формула полной вероятности дает:

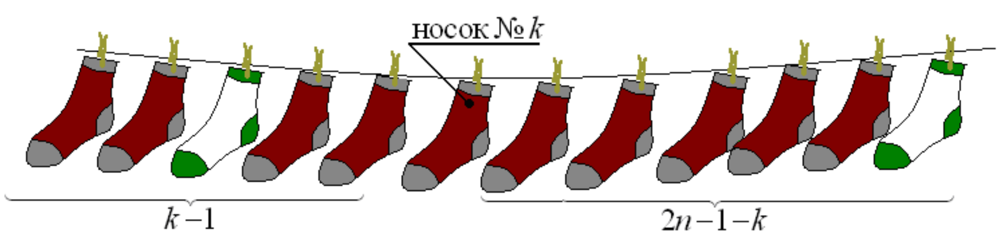
$$p_{3,n} = \frac{2}{2n-1} p_{2,n-1} + \frac{2n-4}{2n-1} p_{3,n-1}$$

Рассуждая аналогично и дальше, получаем:

$$p_{k,n} = \frac{k-1}{2n-1} p_{k-1,n-1} + \frac{2n-1-k}{2n-1} p_{k,n-1}$$

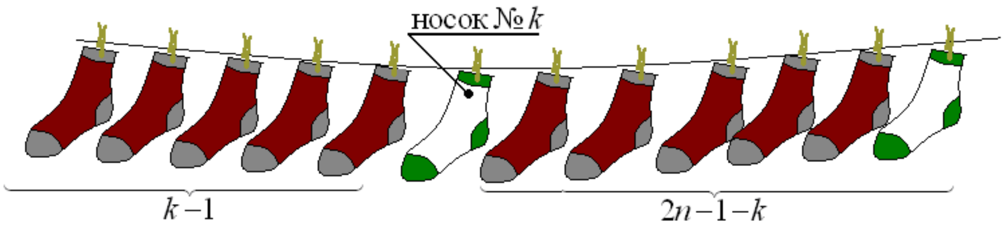
для всех k от 2 до n.

1



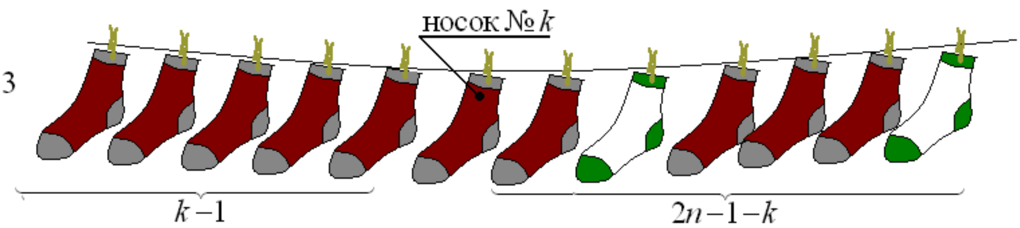
Здесь k-й носок имеет номер $k-1$ в последовательности, из которой удалены белые носки. Поэтому в этом случае $p_{k,n} = p_{k-1,n-1}$.

2



Здесь k-й носок белый, а поэтому он не может образовать пару ни с каким из предыдущих: $p_{k,n} = 0$.

3



Здесь белый носок висит дальше, чем k-й, а поэтому белые можно не рассматривать вообще: $p_{k,n} = p_{k,n-1}$.

Если всего пар $n-1$, то вероятность того, что первая пара получится на $n+1$ носке, равна нулю: $p_{n+1,\,n-1} = 0$. Поэтому для $k = n+1$ получаем:

$$p_{n+1,\,n} = \frac{n}{2n-1} p_{n,\,n-1},$$

Найдем теперь математическое ожидание:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\xi_n &= 2p_{2,n} + 3p_{3,n} + 4p_{5,n} + \ldots + np_{n,n} + (n+1)p_{n+1,n} = \\
&= 2\cdot\frac{2n-3}{2n-1} p_{2,\,n-1} + 3\cdot\frac{2}{2n-1} p_{2,\,n-1} + 3\frac{2n-4}{2n-1} p_{3,\,n-1} + \\
&\quad + 4\cdot\frac{3}{2n-1} p_{3,\,n-1} + 4\frac{2n-5}{2n-1} p_{4,\,n-1} + \ldots \\
&\quad \ldots + n\cdot\frac{n-1}{2n-1} p_{n-1,\,n-1} + n\frac{n-1}{2n-1} p_{n,\,n-1} + (n+1)\frac{n}{2n-1} p_{n,\,n-1}.
\end{aligned}$$

Группируя слагаемые при $p_{k,\,n-1}$, получаем:

$$\mathrm{E}\xi_n = \frac{4n}{2n-1} p_{2,\,n-1} + \frac{6n}{2n-1} p_{3,\,n-1} + \frac{8n}{2n-1} p_{4,\,n-1} + \ldots + \frac{2n^2}{2n-1} p_{n,\,n-1} =$$

$$= \frac{2n}{2n-1}\left(2p_{2,n-1} + 3p_{3,n-1} + 4p_{4,n-1} + \ldots + np_{n,n-1}\right) = \frac{2n}{2n-1}\cdot \mathrm{E}\xi_{n-1}.$$

Полученное соотношение

$$\mathrm{E}\xi_n = \frac{2n}{2n-1}\cdot \mathrm{E}\xi_{n-1}$$

дает возможность вычислить $\mathrm{E}\xi_n$, зная, что $\mathrm{E}\xi_1 = 2$:

$$\mathrm{E}\xi_n = \frac{(2n)\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 4}{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\ldots\cdot 3}\cdot \mathrm{E}\xi_1 = \frac{(2n)\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1} = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}.$$

Этот результат можно представить иначе:

$$\mathrm{E}\xi_n = \frac{\left((2n)!!\right)^2}{(2n-1)!!\cdot(2n)!!} = \frac{\left(2^n n!\right)^2}{(2n)!} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} = \frac{4^n}{C_{2n}^n}.$$

Для получения приближения при больших n воспользуемся формулой Стирлинга: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\cdot n^n e^{-n}$. Получаем:

$$\mathrm{E}\xi_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} \approx \frac{4^n 2\pi n\cdot n^{2n}\cdot e^{-2n}}{e^{-2n}\sqrt{2\pi\cdot 2n}\,(2n)^{2n}} = \sqrt{\pi n}\,.$$

Согласие можно продемонстрировать при большом n. Скажем, если на сушке висит 2012 пар носков, то точная формула дает

$$\mathrm{E}\xi_{2012} = 79{,}509\,,$$

а приближенная даст число

$$\mathrm{E}\xi_{2012} \approx \sqrt{2012\pi} = 79{,}504\,.$$

Погрешность менее $0{,}065\,\%$. Таким образом, если на веревке 4024 носка, то Рассеянному Учёному в среднем повезет уже на семьдесят девятой – восьмидесятой попытке.